1. Три различных положительных числа являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии. Могут ли эти же три числа оказаться тремя (не обязательно последовательными) членами геометрической прогрессии?

Ответ. Могут.

Решение. Рассмотрим геометрическую прогрессию $1, q, q^2, q^3$. Выберем q так, чтобы числа $1, q, q^3$ образовывали арифметическую прогрессию. Для этого нужно, чтобы выполнялось равенство $1 + q^3 = 2q \Leftrightarrow (q^2 + q - 1)(q - 1) = 0$. Один из корней этого уравнения равен $q = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. При таком значении q числа $1, q, q^3$ удовлетворяют условию задачи.

Критерии оценивания решений.

(−) решение не соответствует ни одному из перечисленных ниже критериев.

(−.) доказательство невозможности в случае рациональных чисел или последовательных членов геометрической прогрессии.

(+/2) задача явно сведена к решению полиномиального уравнения третьей степени или выше от знаменателя геометрической прогрессии, но не доказано или доказано неверно существование решения, отличного от 1.

(+/−) верное решение с небольшими недочетами (например, арифметическая ошибка, не влияющая на ход решения)

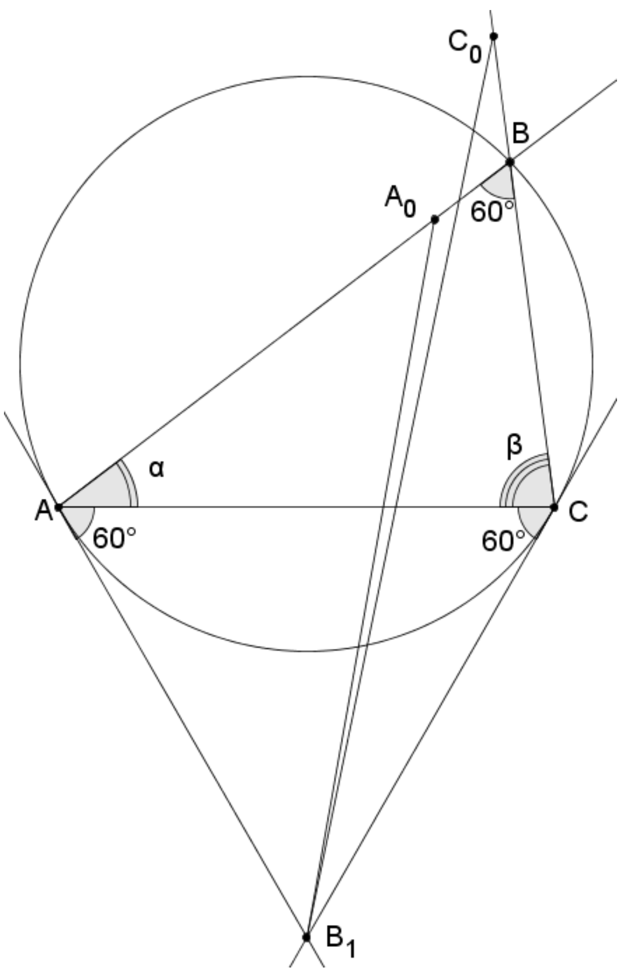
(+) Верное решение.

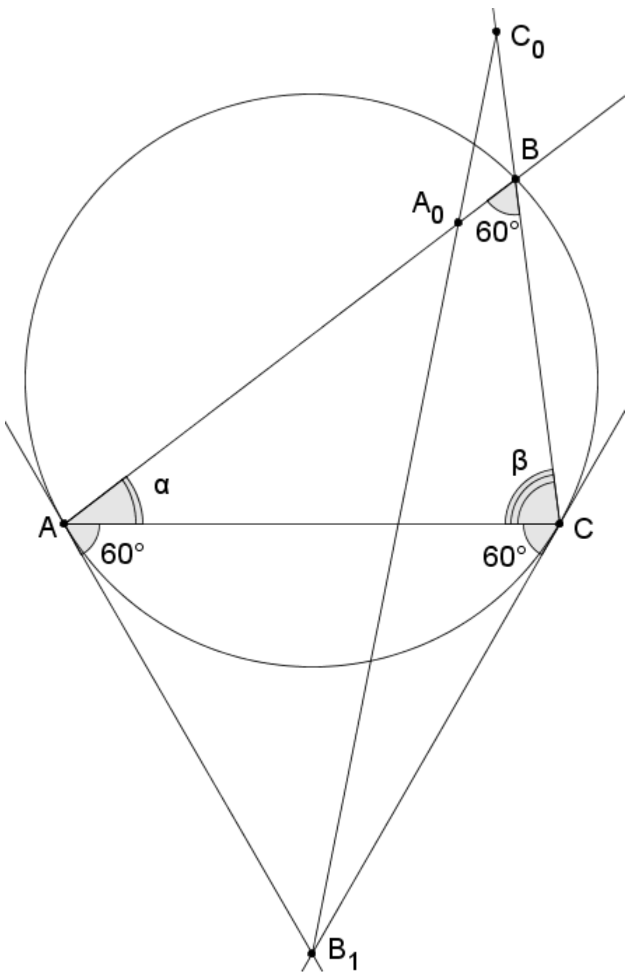
2. Вокруг треугольника ABC с углом $\angle B = 60^\circ$ описана окружность. Касательные к окружности, проведённые в точках A и C, пересекаются в точке B_1. На лучах AB и CB отметили точки A_0 и C_0 соответственно так, что $AA_0 = AC = CC_0$. Докажите, что точки A_0, C_0, B_1 лежат на одной прямой.

Решение. По теореме об угле между касательной и хордой имеем $\angle ACB_1 = \angle CAB_1 = \angle ABC = 60^\circ$, т.е. треугольник AB_1C — равносторонний. Тогда $AA_0 = AC = AB_1$, т.е. треугольник A_0AB_1 равнобедренный. Если обозначить $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \beta$, то получим $\angle AB_1A_0 = \frac{180-(60+\alpha)}{2} = \frac{120-\alpha}{2}$. Отсюда в частности следует, что $\angle AB_1A_0 < 60^\circ$, т.е. точка A_0 расположена внутри угла $\angle AB_1C$, см. рисунок слева. Аналогично $\triangle C_0CB_1$ равнобедренный, и $\angle CB_1C_0 = \frac{120-\beta}{2}$. Сумма этих углов равна

$$\angle AB_1A_0 + \angle CB_1C_0 = \frac{240-(\alpha+\beta)}{2}.$$

Учитывая, что $\alpha + \beta = 120^\circ$, получаем $\angle AB_1A_0 + \angle CB_1C_0 = 60^\circ = \angle AB_1C$, следовательно лучи B_1A_0 и B_1C_0 совпадают (рисунок справа), что и требовалось.





Критерии оценивания решений.

(−) Любое решение, не соответствующее ни одному из перечисленных ниже критериев.

(−.) Рисунок, не соответствующий условию: точки A_0 и C_0 выбраны не на лучах AB и CB, а на их продолжениях. Для такого рисунка доказана равнобедренность треугольников $\triangle C_0CB_1$ и $\triangle A_0AB_1$.

(−/+) Доказана равнобедренность треугольников $\triangle C_0CB_1$ и $\triangle A_0AB_1$.

(+/−) Рисунок, не соответствующий условию: точки A_0 и C_0 выбраны не на лучах AB и CB, а на их продолжениях. Для такого рисунка приведено правильное решение.

(+) Правильное решение

3. Функция $f(x)$, определённая при всех действительных x, является чётной. Кроме того, при любом действительном x выполняется равенство

$$f(x) + f(10 - x) = 4.$$

а) Приведите пример такой функции, отличной от константы.
б) Докажите, что любая такая функция является периодической.

Решение.

а) Например $f(x) = 2 + \cos\left(\frac{\pi x}{10}\right)$. Чётность очевидна, проверим второе условие:

$$f(x) + f(10 - x) = 4 + \cos\left(\frac{\pi x}{10}\right) + \cos\left(\frac{\pi(10 - x)}{10}\right) = 4 + \cos\left(\frac{\pi x}{10}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi x}{10}\right) = 0,$$

т.к. $\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$.

б) Из чётности получаем $f(10 - x) = f(x - 10)$, т.е.

$$f(x) + f(x - 10) = 4$$

при любом x. Подставив сюда $x + 10$ и $x + 20$ вместо x, получим

$$f(x + 10) + f(x) = 4,$$

$$f(x + 20) + f(x + 10) = 4.$$

Вычитая из второго первое, получаем $f(x + 20) - f(x) = 0$ при любом x, т.е. функция периодична с периодом 20.

Критерии оценивания решений.

(−) любое решение, не соответствующее ни одному из перечисленных ниже критериев.

(−.) правильный пример функции без проверки выполнения условий. Допускается пример в виде графика, если в решении дано исчерпывающее и подробное описание графика с указанием всех ключевых точек.

(−/+) правильный пример функции с проверкой выполнения всех условий.

(+/2) правильный пример функции без проверки и нестрогое решение пункта б, основанное на симметриях
ИЛИ
правильный пример функции без проверки и решение пункта б с пропущенным шагом

(+/−) Полное решение пункта б)
ИЛИ
пример функции с проверкой и нестрогое решение пункта б, основанное на симметриях
ИЛИ
пример функции с проверкой и решение пункта б с пропущенным шагом

(+.) Пример функции без проверки и полное решение пункта б).

(+) Пункт а: верный пример с проверкой всех условий и полное решение пункта б)

4. Петя хочет проверить знания своего брата Коли — победителя олимпиады "Высшая проба" по математике. Для этого Петя задумал три натуральных числа a, b, c, и вычислил $x =$НОД(a, b), $y =$НОД(b, c), $z =$НОД(c, a). Затем он написал на доске три ряда по пять чисел в каждом:

$$6,\ 8,\ 12,\ 18,\ 24$$

$$14,\ 20,\ 28,\ 44,\ 56$$

$$5,\ 15,\ 18,\ 27,\ 42$$

Петя сообщил Коле, что одно из чисел в первом ряду равно x, одно из чисел во втором ряду равно y, одно из чисел в третьем ряду равно z, и попросил угадать числа x, y, z. Подумав несколько минут, Коля справился с задачей, правильно назвав все три числа. Назовите их и вы. Докажите, что существует единственная такая тройка (x, y, z).

Ответ. $x = 8,\ y = 14,\ z = 18$.

Решение. Мы будем использовать следующее утверждение:
Лемма. *Если два из чисел x, y, z делятся на некоторое натуральное число m, то и третье делится на m.*

Доказательство. Пусть например x и y делятся на m.

$$\begin{cases} x \vdots m \Rightarrow a \vdots m,\ b \vdots m \\ y \vdots m \Rightarrow b \vdots m,\ c \vdots m. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \vdots m \\ c \vdots m \end{cases} \Rightarrow z \vdots m.$$

$\square$

Следствие: *если одно из чисел x, y, z не делится на m, то из оставшихся двух хотя бы одно тоже не делится на m.*

Рассмотрим теперь данные в задаче числа:

$$6,\ 8,\ 12,\ 18,\ 24$$

$$14,\ 20,\ 28,\ 44,\ 56$$

$$5,\ 15,\ 18,\ 27,\ 42$$

Заметим, что в первых двух строках все числа чётные, т.е. $x \vdots 2,\ y \vdots 2 \Rightarrow z \vdots 2 \Rightarrow z = 18$ или $z = 42$. Далее, оба числа 18 и 42 делятся на 3, т.е. $z \vdots 3$. Во второй строке нет чисел, делящихся на 3, т.е. $y \not\vdots 3 \Rightarrow x \not\vdots 3 \Rightarrow x = 8$. Далее, $x \vdots 4,\ z \not\vdots 4 \Rightarrow y \not\vdots 4 \Rightarrow y = 14$. Наконец $y \vdots 7,\ x \not\vdots 7 \Rightarrow z \not\vdots 7 \Rightarrow z = 18$.

Значения $x = 8,\ y = 14,\ z = 18$ возможны, например, при $a = 72,\ b = 56,\ c = 126$.

Критерии оценивания решений.

(−) Решение, не соответствующее ни одному из перечисленных ниже критериев.

(−.) Рассмотрена делимость на одно число.

(−/+) Рассмотрена делимость на два числа
ИЛИ
сформулирована и доказана лемма, аналогичная или равносильная лемме из приведённого выше решения.

- (+/2) Рассмотрена делимость на три числа.
- (+.) Лемма, аналогичная или равносильная лемме из приведённого выше решения, используется в рассуждениях, но никак не доказана.
- (+) Верное решение: получен правильный ответ и доказана его единственность.

5. Два коридора высотой и шириной в 1 м идут перпендикулярно друг другу по первому и второму этажу здания. Разделяющее их перекрытие разобрано, образуя дыру 1×1 м в полу одного и потолке другого. Какова максимальная длина балки, которую можно передать из одного коридора в другой через дыру? (Балку считать негнущимся отрезком нулевой толщины. Толщина перекрытия также равна нулю, т.е. пол верхнего коридора и потолок нижнего коридора находятся в одной плоскости.)

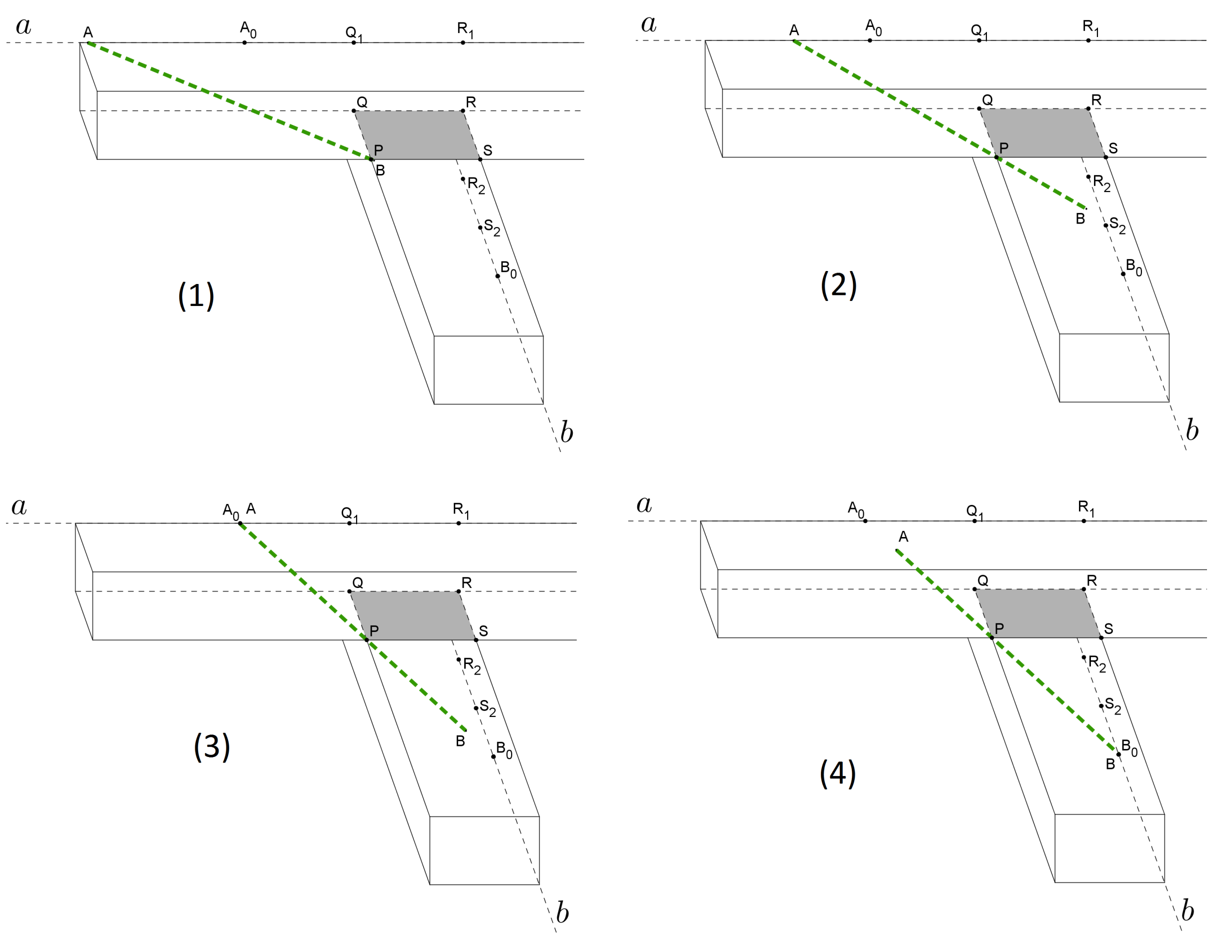
Ответ. $\frac{1}{2} \cdot (2 + \sqrt[3]{4})^{\frac{3}{2}}$.

Решение.

Пусть A и B — концы балки, причём B — нижний конец, который первым попадает в нижний коридор (считаем, что балку передают из верхнего коридора в нижний). Обозначим для краткости $d = \frac{1}{2} \cdot (2 + \sqrt[3]{4})^{\frac{3}{2}}$ — указанную в ответе длину балки, $PQRS$ — квадрат, образующий дыру.

Решение будет состоять из двух частей: **I** — мы покажем, как передать балку указанной в ответе длины, и **II** — докажем, что балку большей длины нельзя передать никаким способом.

I. Нам понадобятся следующие дополнительные обозначения. Стена верхнего коридора, проходящая через точки Q, R, пересекается с потолком верхнего коридора по прямой a (см. рисунок). Стена нижнего коридора, содержащая точки R, S, пересекается с полом нижнего коридора по прямой b. Q_1, R_1 — ортогональные проекции точек Q, R на прямую a, R_2, S_2 — ортогональные проекции точек R, S на прямую b. A_0, B_0 — точки на прямых a, b соответственно, такие, что $\overrightarrow{A_0Q_1} = \overrightarrow{Q_1R_1}$ и $\overrightarrow{B_0S_2} = \overrightarrow{S_2R_2}$. Отрезки PA_0 и PB_0 параллельны отрезку Q_1S, поэтому точки P, A_0, B_0 лежат вдоль одной прямой, причём $PA_0 = PB_0 = \sqrt{3}$.



Перемещение балки будет состоять из следующих шагов (см. рисунки (1)-(4) выше):

(1) Расположим балку так, чтобы её конец A лежал на прямой a, а конец B находился в точке P.

(2) Будем перемещать её конец A вдоль прямой a, так чтобы сама балка всё время проходила через точку P.

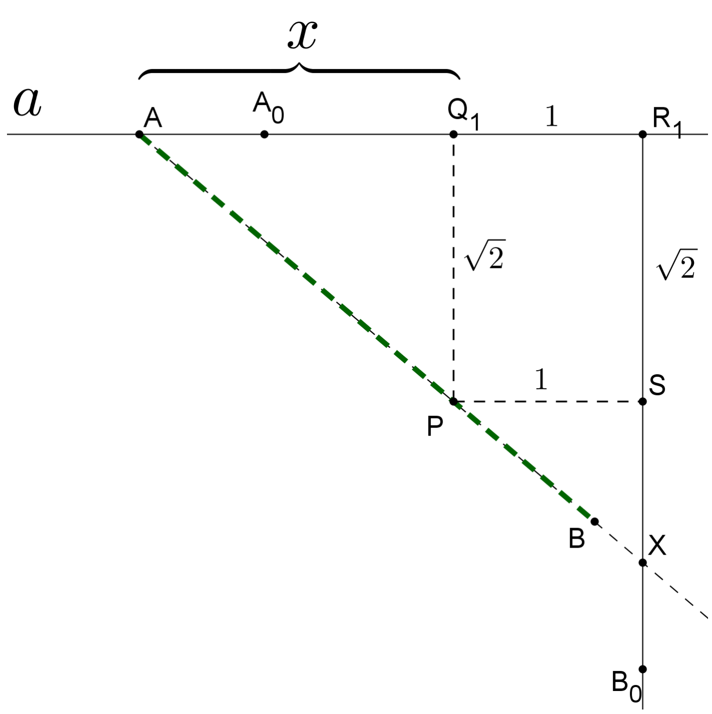
(3) Такое перемещение будем продолжать до тех пор, пока точка A не совпадёт с A_0. В этот момент балка расположится вдоль прямой A_0B_0.

(4) Затем будем двигать балку вдоль прямой A_0B_0, до тех пор, пока точка B не совпадёт с B_0.

(5) Наконец будем двигать точку B вдоль прямой b, так, чтобы вся балка по прежнему проходила через P, до тех пор, пока вся балка не окажется в нижнем коридоре.

Ключевой факт, который нужно проверить — что такое перемещение осуществимо, т.е. что балка всё время будет находиться целиком внутри коридоров. Очевидно достаточно проверить его только для шагов **(1)** – **(3)**

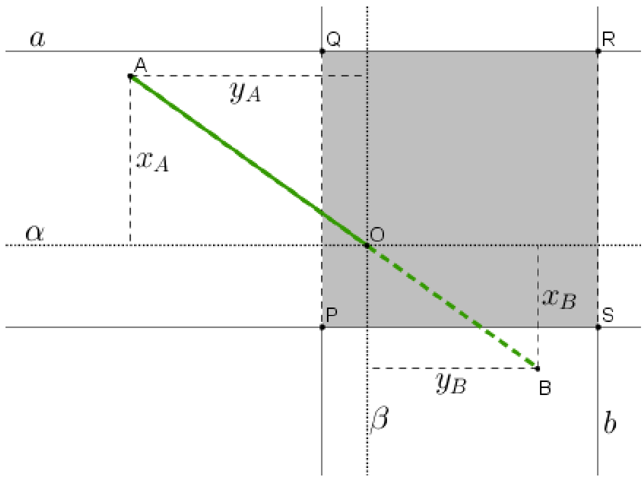
Проведём плоскость δ через прямую a и точку P. На протяжении всех шагов **(1)** – **(4)** балка находится внутри плоскости δ, следовательно можно исследовать движение балки отдельно в этой плоскости (рисунок ниже). Пусть $AQ_1 = x$. Продлим прямую AP до пересечения со стеной нижнего коридора в точке X. Тогда из подобия треугольников APQ_1 и AXR_1 несложно найти $AX = \frac{x+1}{x} \cdot \sqrt{2+x^2}$. Производная этой функции равна $\frac{x^3-2}{x^2\sqrt{2+x^2}}$. Отсюда видно, что минимум функции достигается при $x = \sqrt[3]{2}$. Подставляя это значение в выражение для AX, получаем после преобразований $\min(AX) = d$ (напомним, d обозначает число, указанное в ответе). Таким образом длина AX всё время не меньше длины балки (в частности при $x = 1$ $AX = 2\sqrt{3} > d$), т.е. точка B никогда не выходит за пределы отрезка AX, а значит и за пределы коридоров, что и требовалось.



II. Теперь докажем, что балку длины больше d невозможно передать из одного коридора в другой никаким способом. Пусть O — точка балки, делящая её в отношении

$AO : OB = \sqrt[3]{2} : 1$. Поскольку движение балки непрерывно, при любом способе передачи возникнет момент, когда точка O окажется в плоскости $PQRS$. Покажем, что в этот момент длина балки не может быть больше d.

Пусть α и β — вертикальные плоскости, проходящие через O параллельно осям верхнего и нижнего коридора соответственно, z_A — расстояние от A до плоскости $PQRS$, x_A — расстояние от A до α, y_A — расстояние от A до β, z_B, x_B, y_B — аналогичные расстояния для точки B. (На рисунке ниже слева изображён "вид сверху" в проекции на плоскость $PQRS$, плоскости α и β проецируются в прямые, отрезки z_A и z_B не видны, т.к. проецируются в точки A и B соответственно. Точка O находится в плоскости $PQRS$).



Очевидно $z_A : z_B = x_A : x_B = y_A : y_B = \sqrt[3]{2} : 1$. Кроме того, $x_A \le 1,\ y_B \le 1,\ z_A \le 1$. Тогда длина всей балки

$$AB = (1+\sqrt[3]{2})\cdot\sqrt{x_B^2 + y_B^2 + z_B^2} = (1+\sqrt[3]{2})\cdot\sqrt{\frac{x_A^2}{\sqrt[3]{4}} + y_B^2 + \frac{z_A^2}{\sqrt[3]{4}}} \le (1+\sqrt[3]{2})\cdot\sqrt{\frac{1}{\sqrt[3]{4}} + 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}} = d.$$

Критерии оценивания решений.

(−) Решение, не содержащее продвижений в правильном навправлении, а так же любое решение, в котором указан ответ $2\sqrt{3}$.

(−/+) Имеется правильная идея решения (алгоритм протаскивания балки через отверстие) и попытка (не доведённая до конца) составления функции, выражающей длину отрезка AX через переменную.

(+/−) В задаче получен правильный ответ и показано, что балку такой длины можно передать. Однако не доказано, что балку большей длины передать нельзя.

(+) Верное решение (ответ + способ протаскивания балки + доказательство максимальности).

6. Таблица $n \times n$ заполняется натуральными числами от 1 до 2016 так, чтобы ни в одной строке и ни в одном столбце не было двух одинаковых чисел. Совпадение чисел, стоящих в разных столбцах и строках, допускается. Пусть $f(n)$ - количество таких расстановок. Например $f(1) = 2016,\ f(2017) = 0$.
а) Что больше, $f(2015)$ или $f(2016)$?
б) Что больше, $f(1008)$ или $f(1009)$?

Ответ. а) $f(2015) > f(2016)$, б) $f(1009) > f(1008)$.

Решение. Обозначим через S_n множество всех требуемых расстановок для таблицы $n \times n$. Тогда $f(n)$ по определению равно количеству элементов в множестве S_n.

Введём операцию g над таблицей, заключающуюся в удалении последнего (крайнего правого) столбца и последней (крайней нижней) строки таблицы. Пример:

$$t = \boxed{\begin{array}{cccc} 1 & 12 & 3 & 17 \\ 2015 & 17 & 1 & 8 \\ 100 & 2 & 101 & 56 \\ 101 & 4 & 6 & 12 \end{array}} \qquad g(t) = \boxed{\begin{array}{ccc} 1 & 12 & 3 \\ 2015 & 17 & 1 \\ 100 & 2 & 101 \end{array}}.$$

Очевидно, если $t \in S_n$, то $g(t) \in S_{n-1}$.

а) Мы докажем, что отображение $g:\ S_{2016} \to S_{2015}$ является инъективным (смысл термина будет разъяснён далее), и при этом его образ не покрывает всего множества S_{2015}. Отсюда будет следовать требуемое неравенство.

Утверждение 1. *Пусть дана таблица $y \in S_{2015}$. Тогда существует не более одной таблицы $x \in S_{2016}$ такой, что $g(x) = y$.*

Доказательство. Будем восстанавливать таблицу x по известной таблице $y = g(x)$. Для наглядности изобразим обе таблицы следующим образом:

$$x = \begin{array}{|c|c|} \hline & a_1 \\ & a_2 \\ & a_3 \\ y & \vdots \\ & \vdots \\ & a_{2015} \\ \hline b_1\ b_2\ b_3\ \cdots\ \cdots\ b_{2015} & c \\ \hline \end{array}$$

Т.е. пусть последний столбец таблицы x содержит неизвестные числа $a_1, \ldots, a_{2015}, c$, а последняя строка содержит неизвестные числа $b_1, \ldots, b_{2015}, c$.

Число a_i должно отличаться от всех чисел в строке с номером i таблицы y. Но в любой строке таблицы y стоят 2015 различных чисел из множества $\{1,\ 2,\ \ldots 2016\}$, т.е. для a_i остаётся единственное возможное значение. Следовательно все числа $a_1, \ldots, a_{2015}$ однозначно определяются по таблице y. Аналогично, рассматривая столбцы, однозначно восстанавливаем числа b_j.

Если среди восстановленных чисел $a_1, \ldots, a_{2015}$ есть одинаковые, получаем противоречие с условием, и следовательно таблицы x, удовлетворяющей равнеству $g(x) = y$, не существует. Если же все a_i различны, и все b_j различны, то число c должно отличаться от них всех, и такое число тоже единственно.

Итак, если таблица x существует, то она единственна, что и требовалось. □

Следствие: если $x_1,\ x_2 \in S_{2016}$ и $x_1 \neq x_2$, то $g(x_1) \neq g(x_2)$. (Отображение g с таким свойством в математике называется *инъективным*).

<u>**Утверждение 2.**</u> *Существует таблица $y \in S_{2015}$ такая, что $\forall x \in S_{2016}:\ g(x) \neq y$.*

Доказательство. Рассмотрим таблицу $y \in S_{2015}$, в первой строке которой написаны подряд числа $1, 2, \ldots, 2015$, а в следующих строках — те же числа, сдвигаемые по циклу каждый раз на 1:

$$y = \boxed{\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \ldots & 2013 & 2014 & 2105 \\ 2015 & 1 & 2 & 3 & \ldots & 2013 & 2014 \\ 2014 & 2015 & 1 & 2 & 3 & \ldots & 2013 \\ \vdots & \vdots & & & & & \vdots \end{array}}.$$

Восстанавливая по ней таблицу x так же, как это сделано выше, мы получаем $a_1 = a_2 = \cdots = a_{2015} = 2016$, что противоречит условию. Следовательно искомой таблицы x не существует. □

Из доказанных утверждений следует, что в множестве S_{2015} больше элементов, чем в S_{2016}, т.е. $f(2015) > f(2016)$.

Проиллюстрируем наглядно последний шаг рассуждения. Предположим, что мы выписали в ряд все возможные таблицы $x_1, \ldots, x_K$ из множества S_{2016}. Рассмотрим следующую диаграмму отображения g:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & \ldots & x_K & \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ g(x_1) & g(x_2) & g(x_3) & \ldots & g(x_K) & y \end{array}$$

В множестве S_{2016} ровно K элементов, и все они выписаны в верхнем ряду. В нижнем ряду для каждой таблицы x выписана соответствующая таблица $g(x)$, а также построенная в утверждении 2 таблица y. Все таблицы в нижнем ряду принадлежат множеству S_{2015}, и все они по доказанному различны. Следовательно количество таблиц в множестве S_{2015} больше, чем в S_{2016}.

б) Докажем, что при отображении $g:\ S_{1009} \to S_{1008}$ в каждую таблицу множества S_{1008} отображается более одной таблицы множества S_{1009}. Отсюда будет следовать требуемое неравенство.

<u>**Утверждение 3.**</u> *Пусть дана таблица $y \in S_{1008}$. Тогда существует не менее 1007 различных таблиц $x \in S_{1009}$ таких, что $g(x) = y$.*

Доказательство. Так же, как в п. а), изобразим наглядно равенство $g(x) = y$:

$$x = \begin{array}{|c|c|} \hline & a_1 \\ & a_2 \\ & a_3 \\ y & \vdots \\ & \vdots \\ & a_{1008} \\ \hline b_1 \;\; b_2 \;\; b_3 \;\; \cdots \quad \cdots \;\; b_{1008} & c \\ \hline \end{array}$$

Покажем, как для заданной таблицы $y \in S_{1008}$ построить не менее 1007 различных таблиц x, удовлетворяющих равенству $g(x) = y$.

В объединении первой строки и первого столбца таблицы y написано 2015 чисел (не обязательно все различные), поэтому существует число из множества $\{1, 2, \ldots, 2016\}$, которого нет ни в первой строке, ни в первом столбце таблицы y. Положим a_1 и b_1 равными этому числу. Т.е. согласно нашему выбору $a_1 = b_1$.

Для $i = 2, 3, \ldots 1008$ будем последовательно выбирать числа a_i так, чтобы число a_i не равнялось ни одному из чисел в i-й строке таблицы y, а также не равнялось уже выбранным числам $a_1, \ldots, a_{i-1}$. Такой выбор всегда существует, т.к. "запрещёнными" оказываются всегда не более $1008 + 1007 = 2015$ чисел.

Аналогично для $j = 2, 3, \ldots 1008$ будем последовательно выбирать числа b_j так, чтобы число b_j не равнялось ни одному из чисел в j-м столбце таблицы y, а также не равнялось числам $b_1, \ldots, b_{j-1}$.

Мы изначально выбрали $a_1 = b_1$, поэтому среди чисел $a_i, b_j,\ i, j = 1 \ldots 1008$, не более 2015 различных. Поэтому можно выбрать число c отличным от них всех, и тем самым завершить построение таблицы x. Построенная таблица x удовлетворяет всем условиям задачи и принадлежит множеству S_{1009}, при этом $g(x) = y$.

Заметим, что при выборе числа a_2 запрещёнными были не более 1009 чисел (числа во второй строке таблицы y и число a_1). Поэтому имелось не менее 1007 способов выбрать число a_2, и все они привели бы к различным таблицам x. Следовательно таких таблиц x, для которых $g(x) = y$, не менее 1007, что и требовалось доказать. $\square$

Критерии оценивания решений.

(−) Решение не соответствует ни одному из перечисленных ниже критериев.

(−/+) В пункте а) доказано, что $f(2015) \geq f(2016)$ (нестрогое неравенство).

(+/2) Полностью решён один из пунктов.

(+/−) В обоих пунктах доказано нестрогое неравенство.

(+) Верное решение обоих пунктов.